Théorème de Bohr-Mollerup

Toute fonction $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^{+*}$ vérifiant :
- $\forall x > 0,\ f(x+1) = xf(x)$
- $f(1) = 1$
- f est logarithmiquement convexe

est égale à la fonction Γ définie par $\forall x > 0,\ \Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Démonstration.
- Montrons que Γ vérifie ces propriétés.

  $\star$ Par intégration par parties, on a $\forall x > 0$,

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t = \Big[-t^x e^{-t}\Big]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} x t^{x-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t = x\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t = x\Gamma(x)$$

  $\star$ $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = \Big[-e^{-t}\Big]_0^{+\infty} = 1$.

  $\star$ Comme $\forall x > 0,\ t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue, positive et non identiquement nulle alors $\Gamma(x) > 0$.

  $\star$ Soient $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\lambda \in]0,1[$.

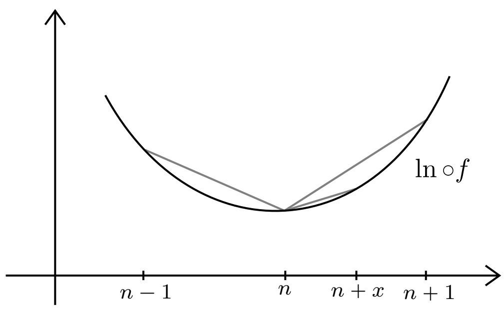
$$\begin{aligned}
\Gamma(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \int_0^{+\infty} t^{\lambda x + (1-\lambda)y - 1} e^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} t^{\lambda(x-1)} t^{(1-\lambda)(y-1)} e^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} \left(t^{x-1}e^{-t}\right)^{\lambda} \left(t^{y-1}e^{-t}\right)^{1-\lambda}\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \left(\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t\right)^{\lambda} \left(\int_0^{+\infty} t^{y-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t\right)^{1-\lambda} \qquad \text{par Hölder} \\
&\leqslant \Gamma(x)^{\lambda}\ \Gamma(y)^{1-\lambda}
\end{aligned}$$

et $\ln\big(\Gamma(\lambda x + (1-\lambda)y)\big) \leqslant \ln\big(\Gamma(x)^{\lambda}\ \Gamma(y)^{1-\lambda}\big) = \lambda \ln(\Gamma(x)) + (1-\lambda)\ln(\Gamma(y))$.

- Soit f une fonction vérifiant ces conditions.

Montrons que $f = \Gamma$.
Notons tout d'abord que $\forall x > 0$,

$$\frac{f(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \frac{xf(x)}{x\Gamma(x)} = \frac{f(x)}{\Gamma(x)}$$



Ainsi, il suffit d'étudier f sur $]0,1]$. Soit $x \in]0,1]$. Soit $n \geqslant 2$. Comme $\ln\circ f$ est convexe, alors en appliquant l'inégalité des trois pentes aux valeurs $n-1 < n < n+x \leqslant n+1$, on obtient

$$\frac{\ln\circ f(n-1) - \ln\circ f(n)}{n-1-n} \leqslant \frac{\ln\circ f(n+x) - \ln\circ f(n)}{n+x-n} \leqslant \frac{\ln\circ f(n+1) - \ln\circ f(n)}{n+1-n}$$

Comme $\forall x > 0,\ f(x+1) = xf(x)$, alors $\forall k \in \mathbb{N},\ f(k+1) = k!$ donc

$$\ln(n-1) = -\ln(n-2)! + \ln(n-1)! \leqslant \frac{\ln\circ f(n+x) - \ln(n-1)!}{x} \leqslant \ln(n!) - \ln(n-1)! = \ln(n)$$

Ainsi, $\ln\big((n-1)^x(n-1)!\big) \leqslant \ln\circ f(x+n) \leqslant \ln\big(n^x(n-1)!\big)$.
Par croissance de l'exponentielle, on a $(n-1)^x(n-1)! \leqslant f(x+n) \leqslant n^x(n-1)!$
Comme $f(x+n) = (x+n-1)\cdots(x+1)xf(x)$, alors on en déduit que

$$\frac{(n-1)^x(n-1)!}{(x+n-1)\cdots(x+1)x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{n^x(n-1)!}{(x+n-1)\cdots(x+1)x} = \frac{n^x n!}{(x+n)\cdots(x+1)x}\frac{x+n}{n}$$

Cette inégalité est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Donc

$$f(x)\frac{n}{x+n} \leqslant \frac{n^x n!}{(x+n)\cdots(x+1)x} \leqslant f(x)$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^x n!}{(x+n)\cdots(x+1)x} = f(x)$. C'est en particulier vrai pour la fonction Γ.
Par unicité de la limite, on a l'égalité sur $]0,1]$ et donc sur $\mathbb{R}^{+*}$. $\square$